

**PEMECAHAN MASALAH *NONLINEAR PROGRAMMING* DENGAN
LAGRANGEAN METHOD MENGGUNAKAN *SUBSTITUTION METHOD* ATAU
*MICROSOFT EXCEL***

Rudy Santosa Sudirga

Email: rudysudirga@yahoo.com

Penulis

Rudy Santosa Sudirga adalah staf pengajar tetap di Jurusan Manajemen, Universitas Bunda Mulia, Jakarta dan juga mengajar tidak tetap di STIE Supra.

Abstract

Lagrange Multipliers are a mathematical tool for constrained optimization of differentiable functions. The given procedure defines the Lagrangean Method for identifying the stationary points of optimization problems with equality constraints; $L(\lambda, X) = f(X) - \lambda g(X - C)$. This function is called the Lagrangean function and the parameters λ is the Lagrange Multipliers. The partial derivatives of this equation $\partial L / \partial \lambda = 0$ and $\partial L / \partial X = 0$ will give the optimal result for X .

However, in some cases, sometimes we have been facing some difficulties to solve nonlinear programming problem with this method, therefore we would like to introduce the Substitution Method or Microsoft Excel Method, which is simple, easier and faster to solve the nonlinear programming problem. Because of the mathematical nature of nonlinear programming models, and in management science we do not have a single general technique to solve all mathematical models that can arise in practice, therefore simpler approaches should be explored first. In some cases, a "common sense" solution may be reached through simple observations.

Key Words

Substitution Method, Microsoft Excel Method, Function

PENDAHULUAN

Menurut Render, B., Stair, R.M., Hanna, M.E. (2006 : 452-454), kita tidak akan selalu dapat menentukan solusi optimal dari suatu problem *nonlinear programming*. Seperti metode *linear programming*, prosedur perhitungan untuk memecahkan masalah *nonlinear programming* tidaklah selalu menghasilkan solusi optimal dengan jumlah langkah-langkah yang serba terbatas. *Classical optimization techniques*, berbasiskan perhitungan kalkulus, dapat dipakai untuk kasus tertentu saja, umumnya seperti tipe sederhana yang mudah. *The gradient method*, kadang-kadang disebut pula *the steepest ascent method*, adalah prosedur yang berubah-ubah dari suatu hal yang mungkin atau dapat dikerjakan dengan mudah ke suatu hal yang lain dalam meningkatkan nilai atau memperhatikan batasan-batasan suatu persamaan (*constraints*). Akan tetapi salah satu cara terbaik didalam menyelesaikan masalah *nonlinear programming* adalah mencoba untuk mengubahnya menjadi suatu bentuk *linear* atau mendekati *liner programming*. Oleh karena itu, penulis memperkenalkan suatu cara yaitu cara substitusi atau ***Substitution Method*** untuk menyederhanakan persamaan *nonlinear programming* tersebut. Cara substitusi ini penulis dapatkan dari pengalaman dan pengamatan penulis selama mengajar *Management Science* di berbagai kelas sejak beberapa tahun yang lalu.

Separable programming adalah suatu cara untuk menyelesaikan masalah *nonlinear programming* dengan pendekatan penyederhanaan persamaan *nonlinear programming*, dimana baik persamaan objektifnya maupun persamaan *constraints* nya (batasan-batasannya) diubah untuk mendekati persamaan *linear programming*. Oleh karena itu penulis juga memperkenalkan cara penyelesaian dengan *Microsoft Excel* dimana penyelesaian dengan "***Excel Solver***" juga berdasarkan pada penyederhanaan

persamaan *nonlinear programming* menjadi persamaan *linear programming*, walaupun sebenarnya persamaan tersebut adalah masih merupakan suatu persamaan *nonlinear programming*.

Menurut Taha, H.A. (2007 : 679-680), ***Lagrange Multipliers*** adalah suatu metode di dalam matematika yang dapat digunakan untuk menentukan maksimum atau minimum suatu fungsi terutama *nonlinear programming* berdasarkan batasan-batasan tertentu (*constraints*). Sebagai contoh, bila ada optimisasi problem:

Maximize: $f(X)$

Subject to: $g(X) = C$ (*constraints* atau batasan-batasan yang diperbolehkan)

Maka untuk menyelesaikan problem diatas, kita memakai variabel baru λ yang disebut sebagai *Lagrange Multiplier*, sehingga persamaan diatas bisa didefinisikan sebagai:

$$L(X, \lambda) = f(X) - \lambda g(X - C)$$

Hasil persamaan ini yang digabung dengan batasan persamaan $g(X) = C$ akan menghasilkan nilai X dan λ yang merupakan kondisi penting yang digunakan untuk mencapai *stationary points*. *Stationary points* adalah keadaan dimana *partial derivatives* dari $L(X, \lambda)$ adalah 0 (nol). Bagaimanapun juga tidak semua *stationary points* merupakan solusi dari problem diatas, oleh karena itu penulis memperkenalkan *Substitution Method* dan *Microsoft Excel Method* untuk menyelesaikan masalah ini.

Fungsi $L(X, \lambda)$ dinamakan *Lagrangean function* dan parameter λ disebut *Lagrange Multipliers*, sehingga *partial derivatives* dari $L(X, \lambda)$ agar menjadi 0 (nol), adalah sebagai berikut :

$\partial L / \partial \lambda = 0$ dan $\partial L / \partial X = 0$, akan memberikan suatu kondisi penting untuk menghitung *stationary points* dari $f(X)$ dengan batasan $g(X) = C$. Keadaan demikian sudahlah cukup untuk menghitung X (*variables*) dengan menggunakan *Lagrangean Method*, akan tetapi pada umumnya cara perhitungannya adalah sangat kompleks dan sulit.

Menurut Taylor, B.W. (2007 : 412-417), jika terdapat *nonlinear programming* model dimana fungsi dari *nonlinear programming* model tersebut bukan merupakan fungsi dari satu variabel, misalkan merupakan fungsi dari dua variabel, maka sebaiknya penyelesaian *nonlinear programming* tersebut dengan cara substitusi, atau dengan cara Excel.

Substitution Method is the simplified classical optimization, which referred to the use of calculus to determine the optimal value of a variable, as we have already simplified the multi-variables to only one variable. Jadi maksudnya, metode substitusi adalah suatu metode klasik yang sangat mudah dan sederhana dengan menggunakan perhitungan kalkulus untuk menentukan nilai optimal dari satu variabel, karena dengan metode substitusi ini kita sudah mengubah atau menyederhanakan model *nonlinear programming* dengan multi variabel menjadi hanya satu variabel saja. Sehingga persamaan *partial derivatives* nya adalah $\partial f(X)/\partial X = 0$. Setelah nilai X yang optimal dapat ditentukan dengan perhitungan, maka dapat ditentukan pula nilai profit yang paling optimal ataupun nilai optimal lainnya seperti harga, dan *volume* (kapasitas produksi).

Menurut Taylor, B.W. (2007 : 418-423), *Microsoft Excel* dapat pula digunakan untuk menyelesaikan perhitungan *nonlinear programming* dengan menggunakan “*Solver*” option yang terdapat di “*Tool*” menu. Untuk menggunakan *solver* di *Excel*, kita harus menyederhanakan dahulu fungsi kuadrat di *nonlinear programming* menjadi fungsi yang lebih sederhana, seperti bentuk *linear programming*, walaupun fungsi yang sudah kita sederhanakan tersebut sebenarnya adalah tetap merupakan fungsi *nonlinear programming*. Selanjutnya kita memasukkan batasan-batasan variabel (*constraints*) dan batasan persamaan fungsi yang sudah kita sederhanakan tersebut kedalam *Excel* untuk dilakukan perhitungan dengan menggunakan “*Excel Solver*”

Menurut Hillier, F.S. et al. (2008 : 254-255), disebabkan adanya hubungan yang sangat dekat antara *linear* dan *nonlinear programming*, maka kadang-kadang tidaklah jelas teknik apa yang harus dipakai untuk menganalisa suatu masalah manajerial. Hal ini terjadi jika masalah yang dihadapi adalah berbentuk *nonlinear* akan tetapi juga dapat

menjadi bentuk *linear*. Dalam hal ini, salah satu alternatif adalah menggunakan pendekatan secara *linear programming*, sehingga metode penyelesaian dengan menggunakan cara *linear programming* dapat dilakukan. Keuntungannya adalah kemudahan didalam menyelesaikan masalah tersebut dengan *linear programming model*. Karena model ini adalah hanya merupakan suatu representasi dari model yang semula dan sebenarnya (*nonlinear programming*), maka alternatif ini akan menjadi layak dan pantas untuk diselesaikan jika pendekatan scara *linear* adalah merupakan cara yang terbaik.

Bagaimanapun juga, keuntungan terbesar menggunakan model *nonlinear programming* dalam keputusan manajerial adalah untuk mendapatkan presisi yang lebih tepat dan akan memberikan hasil yang lebih baik untuk suatu masalah yang nyata.

Walaupun ada sedikit perbedaan saja antara penampakan *linear programming* dan *nonlinear programming model*, aplikasi keduanya berbeda dalam tiga hal, yaitu :

1. *Nonlinear programming* digunakan untuk suatu model yang menunjukkan hubungan *nonproportional* antara aktifitas dan pengukuran kinerja, dimana bentuk *linear programming* menganggap suatu hubungan yang *proportional*.
2. Penciptaan formula *nonlinear* yang diperlukan untuk suatu *nonlinear programming model* adalah lebih sulit dibandingkan mengembangkan formula *linear* yang dipergunakan di *linear programming*.
3. Memecahkan masalah *nonlinear programming model* umumnya selalu lebih sulit dibandingkan memecahkan masalah *linear programming model*.

Menurut Balakrishnan, N., Render, B., Stair, R.M. (2007 : 271-273), di dalam persoalan dan kenyataan hidup, fungsi objektif dan juga salah satu atau lebih dari batasan-batasan untuk fungsi objektif tersebut (*constraints*) adalah *nonlinear*. Solusi optimal dari *nonlinear programming* tersebut tidaklah harus terletak pada titik sudut (*corner points*) dari kemungkinan wilayah yang ditentukan oleh batasan-batasan (*constraints*) fungsi tersebut.

Hal inilah yang menjadikan sebab kenapa banyak problem *nonlinear programming* yang sangat sulit diselesaikan dalam kehidupan praktis. Tidak ada jalan yang pas untuk mengetahui darimana mulainya proses penyelesaian dari suatu problem atau masalah dengan suatu persamaan *nonlinear programming*.

Menurut Balakrishnan, N., Render, B., Stair, R.M. (2007 : 278), mungkin cara terbaik untuk menyelesaikan masalah *nonlinear programming* adalah mencobanya untuk mereduksi persamaan *nonlinear programming* tersebut menjadi suatu bentuk *linear* atau mendekati *linear programming*. Bagaimanapun juga, penyelesaian *nonlinear programming* adalah yang tersulit dibandingkan semua model *decision science*.

Oleh karena itu, untuk memecahkan masalah *nonlinear programming*, dianjurkan untuk menyederhanakannya menjadi bentuk yang mendekati *linear programming*, misalnya dengan penyelesaian *Microsoft Excel* menggunakan *Excel Solver* atau dengan menggunakan cara substitusi atau *Substitution Method* yang penulis perkenalkan di dalam karya tulis ini.

Persoalan *Nonlinear Programming*:

The Beaver Creek Pottery Company has developed the following nonlinear programming model to determine the optimal number of bowls and mugs (X_1 and X_2) to produce each day. The company wants to maximize profit (Z). The constraints for the nonlinear programming model are as follows:

$$\text{Maximize: } Z = 7X_1 - 0.3X_1^2 + 8X_2 - 0.4X_2^2$$

$$\text{Subject to: } 5X_1 + 4X_2 = 100 \text{ labor-hours}$$

- a) *Determine the optimal solution of this nonlinear programming model*
- b) *Determine the maximum profit*

Jawaban dengan *Lagrangean Method* (*Lagrange Multipliers*):

a) $L(X, \lambda) = f(X) - \lambda g(X - C)$

$$L(X, \lambda) = 7X_1 - 0.3X_1^2 + 8X_2 - 0.4X_2^2 - \lambda(5X_1 + 4X_2 - 100)$$

$$\partial L / \partial X_1 = 0 \rightarrow 7 - 0.6X_1 - 5\lambda = 0 \rightarrow x_4 \rightarrow 28 - 2.4X_1 - 20\lambda = 0$$

$$\partial L / \partial X_2 = 0 \rightarrow 8 - 0.8X_2 - 4\lambda = 0 \rightarrow x_5 \rightarrow 40 - 4X_2 - 20\lambda = 0$$

$$-12 - 2.4X_1 + 4X_2 = 0$$

$$-2.4X_1 + 4X_2 = 12$$

$$\partial L / \partial \lambda = 0 \rightarrow 5X_1 + 4X_2 - 100 = 0 \rightarrow$$

$$5X_1 + 4X_2 = 100$$

$$-7.4X_1 = -88$$

$$X_1 = 11.89 \approx 12$$

$$5X_1 + 4X_2 = 100$$

$$5(12) + 4X_2 = 100$$

$$4X_2 = 40$$

$$X_2 = 10$$

b) $Z = 7(12) - 0.3(12)^2 + 8(10) - 0.4(10)^2$

$$Z = 84 - 43.2 + 80 - 40$$

$$Z = \$80.8$$

Jawaban dengan cara substitusi (*Substitution Method*):

a) $5X_1 + 4X_2 = 100$

$$\rightarrow X_2 = (25 - 1.25X_1)$$

Substitusi untuk X_2 :

$$Z = 7X_1 - 0.3X_1^2 + 8(25 - 1.25X_1) - 0.4(25 - 1.25X_1)^2$$

$$Z = 7X_1 - 0.3X_1^2 + 200 - 10X_1 - 0.4(625 - 62.5X_1 + 1.5625X_1^2)$$

$$Z = 7X_1 - 0.3X_1^2 + 200 - 10X_1 - 250 + 25X_1 - 0.625X_1^2$$

$$Z = 22X_1 - 0.925X_1^2 - 50$$

$$\partial Z / \partial X_1 = 22 - 1.85X_1 = 0$$

$$1.85X_1 = 22$$

$$X_1 = 11.89 \approx 12$$

$$X_2 = 25 - 1.25(12)$$

$$X_2 = 25 - 15$$

$$X_2 = 10$$

$$\text{b) } Z = 7(12) - 0.3(12)^2 + 8(10) - 0.4(10)^2 = \$80.8$$

Jawaban dengan cara *Microsoft Excel* (dengan *Excel Solver*):

Menurut Balakrishnan, N., Render, B., Stair, R.M. (2007 : 278), mungkin cara terbaik untuk menyelesaikan masalah *nonlinear programming* adalah mencobanya untuk mereduksi persamaan *nonlinear programming* tersebut menjadi suatu bentuk *linear* atau mendekati *linear programming*.

Penyelesaian dengan “*Excel Solver*” juga berdasarkan pada penyederhanaan persamaan *nonlinear programming* menjadi persamaan *linear programming*, walaupun sebenarnya persamaan tersebut adalah masih merupakan suatu persamaan *nonlinear programming*.

Persamaan disederhanakan menjadi bentuk seperti *linear programming*, walaupun sebenarnya persamaan dibawah ini adalah masih merupakan suatu persamaan *nonlinear programming*, sebagai berikut:

$$\text{Maximize } Z = \$ (7 - 0.3X_1)X_1 + (8 - 0.4X_2)X_2$$

Dimana, $(7 - 0.3X_1)$ adalah *profit* (\$) *per bowl* dan $(8 - 0.2X_2)$ adalah *profit per mug*.

Subject to: $5X_1 + 4X_2 = 100$ labor-hours (*constraints*)

Penyelesaian dengan "*Excel Solver*" dapat dilihat di file "Penyelesaian dengan "*Excel Solver*", dengan tahapan penyelesaian sebagai berikut:

1. Kosongkan sel C5 sebagai jumlah *bowls* yang akan dihitung
2. Kosongkan sel C6 sebagai jumlah *mugs* yang akan dihitung
3. Masukkan *formula* $7 - (0.3) * C5$ di sel D5
4. Masukkan *formula* $8 - (0.4) * C6$ di sel D6
5. Masukkan *formula* $5 * C5 + 4 * C6$ di sel C9, sesuai dengan persamaan *constraints*.
6. Masukkan angka 100 di sel D9, sebagai *maximum labor-hours* yang tersedia
7. Masukkan *formula* *SUMPRODUCT* (C5 : C6, D5 : D6), yang merupakan persamaan *profit* sebagai hasil perkalian antara C5, D5, dan C6, D6.
8. Letakkan kursor di sel C11 untuk menghitung *profit* dengan *Excel Solver*
9. Klik "*Tools*", lalu klik "*Add-Ins*", tambahkan *Solver Add-in*, lalu klik OK, maka di menu "*Tools*" akan muncul "*Solver*"
10. Penyelesaiannya adalah dengan menempatkan kursor di sel C11, meng-klik "*Tools*", lalu "*Solver*", pilih "*Max*", pada "*By Changing Cells*": ketik C5:C6, yaitu *bowls* dan *mugs* yang akan kita hitung, dan pada "*Subject to the Constraints*": klik *add*, dan tambahkan $\$C\$5:\$C\$6 \geq 0$ (karena jumlah *bowls* dan *mugs* pasti positif), dan klik *add* sekali lagi dan tambahkan $\$C\$9 = \$D\9 , yaitu merupakan suatu persamaan *constraints* yang menerangkan bahwa jumlah *labor-hours* di sel C9 sama dengan jumlah *maximum labor-hours* yang tersedia, yang dinyatakan oleh sel D9.
11. Terakhir adalah klik "*Solve*", dan akan didapatkan pilihan jawaban seperti "*Answer*", "*Sensitivity*" dan "*Limits*"
12. Akan didapatkan bahwa sel C5 terisi dengan angka 12 (jumlah *bowls*), dan sel C6 terisi dengan angka 10 (jumlah *mugs*), dan sel C11 akan terisi dengan \$80.8 (yang merupakan *total profit*)

Microsoft Excel 10.0 Answer Report

Worksheet: [Chapter10-9th, Nonlinear Programming #1.xls]Nonlinear Programming

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$11	Total profit = Used	0.00	80.81

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$5	Bowls = Production	0.0	11.9
\$C\$6	Mugs = Production	0.0	10.1

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$C\$9	Labor hours: Used	100	\$C\$9=\$D\$9	Not Binding	0
\$C\$5	Bowls = Production	11.9	\$C\$5>=0	Not Binding	11.9
\$C\$6	Mugs = Production	10.1	\$C\$6>=0	Not Binding	10.1

Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report

Worksheet: [Chapter10-9th, Nonlinear Programming #1.xls]Nonlinear Programming

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Gradient
\$C\$5	Bowls = Production	11.9	0.0
\$C\$6	Mugs = Production	10.1	0.0

Constraints

Cell	Name	Final Value	Lagrange Multiplier
\$C\$9	Labor hours: Used	100	0

The Beaver Creek Pottery Company

	<i>Production</i>	<i>Profit per unit</i>
<i>Bowls =</i>	12	3.43
<i>Mugs =</i>	10	3.95

	<i>Used</i>	<i>Available</i>
<i>Labor hours:</i>	100	100

<i>Total profit =</i>	80.8
-----------------------	------

Disini terlihat bahwa nonlinear programming dapat diselesaikan dengan 3 cara, yaitu *Lagrangean Method (Lagrange Multipliers)*, cara substitusi (*Substitution Method*) dan cara *Microsoft Excel* (dengan *Excel Solver*). Dari ke 3 cara tersebut, **cara substitusi (*Substitution Method*)** adalah merupakan cara yang paling sederhana, mudah dan cepat.

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A., 2005 *An Introduction to Management Science*. 11th ed. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Balakrishnan, N., Render, B., Stair, R.M., 2007, *Managerial Decision Modeling with Spreadsheets* .2nd ed.. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Camm, J., 2000. *Management Science and Decision Technology*. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Deitz, J.E., Southam, J., 2006. *Contemporary Business Math for Colleges*. 14th ed. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Greene, W.H., 2008, *Econometrics Analysis* 6th ed.. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Hillier, F.S. et al., 2008. *Introduction to Management Science*. 3rd ed. McGraw-Hill/Irwin, New York.

- Lapin, L., Whisler, W.D. 2002. *Quantitative Decision Making with Spreadsheet Applications*. 7th ed. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Ragsdale, C., 2004. *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis*. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Render, B., Stair, R.M., Hanna, M.E., 2006. *Quantitative Analysis for Management*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Stock, J.H., Watson, M.W., 2007. *Introduction to Econometrics*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Taha, H.A., 2007. *Operations Research: An Introduction*. 8th ed. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Taylor, B.W. 2007. *Introduction to Management Science*. 9th ed. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Waters, D., 2008. *Quantitative Methods for Business*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Winston, W.L., Albright, S.C., 2005. *Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications*. Updated. 2nd ed. Thomson South-Western, Mason, Ohio.
- Wooldridge, J., 2006. *Introductory Econometrics*. 3rd ed. Thomson South-Western, Mason, Ohio.